KĨ THUẬT PHÂN TÍCH BÌNH PHƯƠNG HOÁN VỊ
SUM OF CYCLIC (S.O.C)

I/ Lời nói đầu.

Bất đẳng thức hoán vị là những bài toán rất đẹp bới sự phát biểu đơn giản nhẹ nhàng của chúng. Tuy nhiên, việc giải chúng thì ngược lại, việc tìm một lời giải cho chúng vô cùng vất vả và khó khăn. Và đối với những bài toán có 2 đẳng thức trở lên thì mọi việc lại càng trở nên khó khăn hơn. Sau một thời gian học hỏi kinh nghiệm và tìm tòi, tôi đã tìm được một kĩ thuật để đánh giá cho những bất đẳng thức hoán vị đơn giản. Do độ khó của các bài toán nên đôi khi một số lời giải có đôi chút *dài*, nhưng bù lại là ta có thể làm chặt cho một số bài toán (đây là một điều bất ngờ mà kĩ thuật này mang lại).

Cũng xin nói thêm rằng: bất đẳng thức hiện đại rất phong phú với rất nhiều bài tập. Tuy nhiên với bất đẳng thức hoán vị vòng quanh thì khác, nó rất ít nên có thể coi là những bài toán *hiếm*. Việc tạo ra một bất đẳng thức đúng đã là khó mà để bất đẳng thức đó hay thì càng khó hơn, nên đối với bất đẳng thức hoán vị thì điều đó lại càng khó thực hiện. Vì thế kĩ thuật này chỉ là một công cụ nhỏ nhưng lại vô cùng hữu ích để các bạn có thêm một hướng giải quyết các bài toán bất đẳng thức hoán vị vòng quanh ba biến.

Mặc dù bài viết được hoàn thành trong lúc tôi đang cắm trại nên rất mệt, nhưng tôi vẫn cố gắng hoàn thành bài viết này trong một ngày trọng đại 26-3-2009 (Đoàn thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh). Vì thế tôi sẽ rất hoan nghênh những sự đóng góp, tìm tòi sáng tạo thêm cho kĩ thuật này từ phía các bạn. Mọi thắc mắc – đóng góp ý kiến xin vui long liên hệ theo địa chỉ:

E-mail: vnineq@yahoo.com hoặc YM: **vnineq**

Tác giả

VIF

II/ Cơ sở của kĩ thuật.

Sẽ thật bất ngờ nếu tôi nói với các bạn rằng cơ sở của kĩ thuật này là phương pháp phân tích bình phương S.O.S: là đưa bất đẳng thức thuần nhất ba biến *a,b,c* về dạng:

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$$

Đối với bất đẳng thức đối xứng ba biến thì việc quy về dạng chính tắc S.O.S như trên là đơn giản giúp ta dễ dàng giải quyết bài toán. Tuy nhiên, đối với bất đẳng thức hoán vị vòng quanh thì cách quy trên đôi khi không thích hợp và tạo ra các hệ số $S_a;S_b;S_c$ rất cồng kềnh và khó xử lí. Trong trường hợp đó có một cách khác là quy về dạng: *(Tôi tạm gọi nó là phân tích bình phương hoán vị S.O.C)*

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge S(a-b)(b-c)(c-a)$$

Cách quy trên có gì lợi?:

- Thứ nhất: đối với các dạng hoán vị vòng quanh thì nó tự nhiên và đơn giản hơn cách đưa về S.O.S chính thống.
- Thứ hai: đối với bất đẳng thức hoán vị thì ta chỉ cần xét một trong 2 khả năng sau:
  + Một trong ba số là lớn nhất (giả sử là $a=\max\{a,b,c\}$), thì ta xét 2 trường hợp có thể xảy ra là $a\ge b\ge c$ và $a\ge c\ge b$.
  + Một trong ba ở giữa 2 số kia (giả sử là *b*), thì ta xét 2 trường hợp có thể xảy ra là $a\ge b\ge c$ và $c\ge b\ge a$.

Vì vậy, nếu vế trái và S không âm thì ta chỉ xét trường hợp $c\ge b\ge a$ mà bỏ qua trường hợp $a\ge b\ge c$.

Cuối cùng cũng xin lưu ý luôn là đối với các bài toán sau đây chúng ta cũng chỉ xét trường hợp $c\ge b\ge a$ (khi đó $(a-b)(b-c)(c-a)\ge 0\Rightarrow a^2b+b^2c+c^2a\le ab^2+bc^2+ca^2$), còn với trường hợp $a\ge b\ge c$ thì $S(a-b)(b-c)(c-a)\le 0$, và ta chỉ phải làm theo phương pháp truyền thống S.O.S là chứng minh bất đẳng thức:

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$$

III/ Phân tích cơ sở.

1. $ab^2+bc^2+ca^2-a^2b-b^2c-c^2a=(a-b)(b-c)(c-a)$

2. $ab^2+bc^2+ca^2-3abc=\frac{1}{2}\left(ab^2+bc^2+ca^2-a^2b-b^2c-c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a-6abc\right)$

$=\frac{1}{2}\left((a-b)(b-c)(c-a)+a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\right)$

3. $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

4. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b+a-b}{a+b}+\frac{b+c+b-c}{b+c}+\frac{c+a+c-a}{c+a}\right)=\frac{1}{2}\left(3+\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(3-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)$

5. $ab^3+bc^3+ca^3-a^3b-b^3c-c^3a=(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

Bên cạnh các phân tích sơ sở này còn rất nhiều cách phân tích khác mà các bạn có thể tự tìm thấy trong quá trình giải toán.

IV/ Xây dựng định lí.

Chúng ta sẽ xây dựng định lí, đưa ra các tiêu chuẩn từ cách phân tích

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge S(a-b)(b-c)(c-a)$$

Chú ý: ở đây ta chỉ xét đến trường hợp $c\ge b\ge a$

Như thế thì $(a-b)(b-c)\ge 0$ nên

$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2=S_a(b-c)^2+S_b(a-b+b-c)^2+S_c(a-b)^2=$

$=(S_b+S_c)(a-b)^2+(S_a+S_b)(b-c)^2+2S_b(a-b)(b-c)\underset{AM-GM}{\ge}2\sqrt{(S_a+S_b)(S_b+S_c)}(a-b)(b-c)+2S_b(a-b)(b-c)$

Do đó bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được

$2\sqrt{(S_a+S_b)(S_b+S_c)}+2S_b-S\ge 0$

Xây dựng tương tự như trên bằng cách tách $a-b=c-b-(c-a)$ và $b-c=b-a-(c-a)$, ta cũng được thêm 2 tiểu chuẩn nữa.

Tiếp tục xây dựng: ta có

$S_b(c-a)^2=S_b(c-b+b-a)^2\underset{AM-GM}{\ge}4S_b(c-b)(b-a)$

và $S_a(b-c)^2+S_c(a-b)^2\ge 2\sqrt{S_a.S_c}.(b-a)(c-b)$

Do đó bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được $4S_b+2\sqrt{S_a.S_c}\ge S(c-a)$

Ngoài ra ta còn có $S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 3\sqrt[3]{S_aS_bS_c(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}$

Nên bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được

$$27S_aS_bS_c\ge S^3(a-b)(b-c)(c-a)$$

Hệ thống các kết quả trên ta có các tiêu chuẩn sau:

1. $S_a+S_b\ge 0, S_b+S_c\ge 0, 2\sqrt{(S_a+S_b)(S_b+S_c)}+2S_b-S(c-a)\ge 0$
2. $S_a+S_b\ge 0, S_a+S_c\ge 0, 2\sqrt{(S_a+S_b)(S_a+S_c)}-2S_a-S(c-b)\ge 0$
3. $S_c+S_a\ge 0, S_c+S_b\ge 0, 2\sqrt{(S_c+S_a)(S_c+S_b)}-2S_c-S(b-a)\ge 0$
4. $S_a\ge 0, S_c\ge 0, 2\sqrt{S_a.S_c}+4S_b-S(c-a)\ge 0$
5. $S_a\ge 0, S_b\ge 0, S_c\ge 0, 2\sqrt{S_bS_c}-S(c-b)\ge 0$
6. $S_a\ge 0, S_b\ge 0, S_c\ge 0, 2\sqrt{S_aS_b}-S(b-a)\ge 0$
7. $S_a\ge 0, S_b\ge 0, S_c\ge 0, 27S_aS_bS_c-S^3(a-b)(b-c)(c-a)\ge 0$

Các tiêu chuẩn trên rất tiện để xử lí những bài toán có các hệ số $S_a;S_b;S_c$ cồng kềnh (đặc biệt là *tiêu chuẩn 1* rất mạnh). Tuy nhiên nếu ta gặp những bài toán rất chặt đến nỗi không thể áp dụng được tiêu chí nào thì có một cách khác là đặt $c=a+x+y$ và $b=a+x$ $(x,y\ge 0)$. Cách làm này giúp ta có thể loại đi *a* một cách nhanh chóng nhờ cách phân tích trên (bởi $c-a=x+y; b-a=x$). Hơn nữa ta lại còn có thể làm chặt cho bất đẳng thức nhờ các biến còn *thừa* lại. Các bài toán áp dụng sau để làm sáng tỏ thêm cho điều này.

Ngoài ra, ta còn có thể chia nhỏ nhiều trường hợp nữa trong $c\ge b\ge a$ để dễ dàng giải quyết bài toán.

V/ Áp dụng vào giải toán.

Có lẽ mọi kĩ thuật cũng xuất phát từ một bài toán nào đó. Và tôi cũng vậy, tôi xin bắt đầu bằng một bài toán khởi đầu cho kĩ thuật này một cách tình cờ:

Bài toán 1. *Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh bất đẳng thức*

$$a^3+b^3+c^3+3abc.\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{ab^2+bc^2+ca^2}\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

Lời giải.

Nếu $a\ge b\ge c$ thì $a^2b+b^2c+c^2a\ge ab^2+bc^2+ca^2$, nên theo bất đẳng thức Schur thì

$$a^3+b^3+c^3+3abc.\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{ab^2+bc^2+ca^2}\ge a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

Nếu $c\ge b\ge a$ thì bất đẳng thức được viết lại như sau

$$a^3+b^3+c^3-3abc+3abc.\left(\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{ab^2+bc^2+ca^2}-1\right)\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-6abc$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)-\frac{3abc(a-b)(b-c)(c-a)}{ab^2+bc^2+ca^2}\ge a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b-c)(a-b)^2+\frac{1}{2}(b+c-a)(b-c)^2+\frac{1}{2}(c+a-b)(c-a)^2\ge \frac{3abc(a-b)(b-c)(c-a)}{ab^2+bc^2+ca^2}$$

Theo tiêu chuẩn 1 thì ta chỉ cần chứng minh $2\sqrt{ac}+c+a-b-\frac{3abc(c-a)}{ab^2+bc^2+ca^2}\ge 0$

Quy đồng, rút gọn và nhóm các số hạng lại với nhau ta được bất đẳng thức tương đương là

$$2bc^2\left(\sqrt{ac}-a\right)+ab^2(c-b)+bc^2(c-b)+a^2c^2+a^2b^2+a^3c+2ab^2\sqrt{ac}+2ca^2\sqrt{ac}+2a^2bc\ge 0$$

Bất đẳng thức trên đúng do $c\ge b\ge a$

Vậy ta có ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba biến bằng nhua hoặc một trong 3 biến bằng 0 và 2 biến còn lại bằng nhau.

Bài toán 2. (Nguyễn Trọng Thọ) *Chứng minh rằng với a,b,c>0 thì:*

$$\frac{a^3}{2a^2+b^2}+\frac{b^3}{2b^2+c^2}+\frac{c^3}{2c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

Lời giải. để chô gọn ta kí hiệu $\sum$ là tổng cyclic (mỗi tổng gồm 3 số hạng). Bằng cách biến đổi tương đương ta có

$$\sum\frac{a^3-ab^2}{2a^2+b^2}\ge 0\Leftrightarrow\sum(a^3-ab^2)(2b^2+c^2)(2c^2+a^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sum a^3b^2c^2+2\sum a^3c^4+2\sum a^5b^2+\sum a^5c^2\ge 4\sum ab^4c^2+2\sum ab^2c^4+2\sum a^3b^4$$

$$\Leftrightarrow 2\sum\left(a^5b^2+a^3b^2c^2-2a^4b^2c\right)+\sum\left(a^5c^2+a^3b^2c^2-2a^4bc^2\right)\ge 2\left(\sum a^3b^4-a^3c^4\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sum a^3b^2(a-c)^2+\sum a^3c^2(a-b)^2\ge 2(a-b)(b-c)(c-a)\left(\sum a^2b^2+\sum a^2bc\right)$$

Bây giờ giả sử $a=\max\{a,b,c\}$. Nếu c<b thì bất đẳng thức trên đúng nên ta chỉ phải xét khi $a\ge c\ge b$. Ta sẽ chứng minh

$$2a^3b^2(a-c)^2+2a^2c^3(c-b)^2+a^3c^2(a-b)^2\ge 2(a-c)(c-b)\left(a^3c^2+a^3bc+a^3b^2\right)$$

Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1. Xét khi $c-b\le a-c$, ta có

$$b^2(a-c)^2+a^3c^2(a-b)^2\ge 2a^3b^2(a-c)(c-b)+4a^3c^2(a-c)(c-b)$$

Vì $a^3b^2+2a^3c^2\ge a^3\left(c^2+bc+b^2\right)$ nên suy rađiều phải chứng minh.

Trường hợp 2. Xét khi $c-b>a-c$, tương tự như trên ta có

$$2a^2c^3(c-b)^2+a^3c^2(a-b)^2\ge 2a^2c^3(a-c)(c-b)+4a^3c^2(a-c)(c-b)$$

Vì $a^2c^3+2a^3c^2-a^3\left(c^2+bc+b^2\right)>a^2c^2b+a^3bc-a^3\left(bc+b^2\right)=a^3b(c-b)+a^2bc(c-a)\ge 0$

Nên ta cũng có điều phải chứng minh.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a=b=c.

Bài toán 3. (VIF) *Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh*

$$\frac{4a}{a+b}+\frac{4b}{b+c}+\frac{4c}{c+a}+\frac{ab^2+bc^2+ca^2+abc}{a^2b+b^2c+c^2a+abc}\ge 7$$

Lời giải. theo cách phân tích cơ sở 4 thì bất đẳng thức được viết lại thành

$$2\left(3-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)+\left(\frac{ab^2+bc^2+ca^2+abc}{a^2b+b^2c+c^2a+abc}-1\right)\ge 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a^2b+b^2c+c^2a+abc}-\frac{2(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)(b-c)(c-a)\left[(a+b)(b+c)(c+a)-2\left(a^2b+b^2c+c^2a+abc\right)\right]}{\left(a^2b+b^2c+c^2a+abc\right)(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left[(a-b)(b-c)(c-a)\right]^2}{\left(a^2b+b^2c+c^2a+abc\right)(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a=b=c.

Bài toán 4. (UK TST 2005) *cho các số thực dương a,b,c sao cho abc=1. Chứng minh rằng:* $\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2}\ge 3$

Lời giải (VIF). do abc=1 nên đặt $a=\frac{y}{x},b=\frac{z}{y},c=\frac{x}{z}$

Bất đẳng thức trên được viết lại như sau

$$\frac{3x^2+xy}{(x+y)^2}+\frac{3y^2+yz}{(y+z)^2}+\frac{3z^2+zx}{(z+x)^2}\ge 3\Leftrightarrow \frac{3}{4}\left[\left(\frac{x-y}{x+y}+1\right)^2+\left(\frac{y-z}{y+z}+1\right)^2+\left(\frac{z-x}{z+x}+1\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{4}\left[\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)^2}+\frac{(y+z)^2-(y-z)^2}{(y+z)^2}+\frac{(z+x)^2-(z-x)^2}{(z+x)^2}\right]\ge 3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2+\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^2+\left(\frac{z-x}{z+x}\right)^2\ge -3\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}\right)=\frac{3(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Nếu $(x-y)(y-z)(z-x)\le 0$ thì bđt trên hiển nhiên đúng.

Nếu $(x-y)(y-z)(z-x)\ge 0$ thì $\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2+\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^2+\left(\frac{z-x}{z+x}\right)^2 \underset{AM-GM}{\ge} 3\sqrt[3]{\left(\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\right)^2}$

nên ta chỉ cần chứng minh $\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\le 1 \Leftrightarrow 2\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\ge 0$ (luôn đúng).

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a=b=c=1.

Có thể nói hai bài toán trên không cần phải sử dụng đến một tiêu chuẩn nào cả. nhưng mặt khác lại cho thấy được cái lời khi phân tích về $S(a-b)(b-c)(c-a)$.

Và bây giờ chúng ta sẽ thực hiện làm chặt một số bất đẳng thức bằng các biến còn *thừa* như đã nói ở **Lời nói đầu.**

Bài toán 5. *Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh bất đẳng thức*

$$4(a+b+c)^3\ge 27\left(ab^2+bc^2+ca^2+abc\right)$$

Lời giải.

Nếu $a\ge b\ge c$ thì $ab^2+bc^2+ca^2+abc\ge ab^2+bc^2+ca^2+abc$ nên

$$27\left(ab^2+bc^2+ca^2+abc\right)\le \frac{27}{2}\left(ab^2+bc^2+ca^2+ab^2+bc^2+ca^2+abc\right)$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $27\left(ab^2+bc^2+ca^2+ab^2+bc^2+ca^2+abc\right)\le 8(a+b+c)^3$

$$\Leftrightarrow 8\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 3\left(ab^2+bc^2+ca^2+ab^2+bc^2+ca^2\right)+6abc$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM

Nếu $c\ge b\ge a$ thì ta viết bất đẳng thức lại như sau:

$$4\sum a^3+12\sum a^2b-15\sum ab^2-3abc\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sum a^3-3abc\right)-\frac{3}{2}\left[\sum(ab(a+b))-6abc\right]+\frac{27}{2}\left(\sum a^2b-\sum ab^2\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)\left[\sum(a-b)^2\right]-\frac{3}{2}\sum\left(a(b-c)^2\right)\ge\frac{27}{2}(c-b)(b-a)(c-a)$$

$$\Leftrightarrow (4b+4c+a)(b-c)^2+(4c+4a+b)(c-a)^2+(4a+4b+c)(a-b)^2\ge 27(c-b)(b-a)(c-a)$$

$$\Leftrightarrow (5a+5b+8c)(c-b)^2+(8a+5b+5c)(b-a)^2+2(4a+b+4c)(c-b)(b-a)\ge 27(c-b)(b-a)(c-a)$$

Đặt $c=a+x+y, b=a+x$. Bất đẳng thức được viết lại như sau

$$y^2(18a+8y+13x)+x^2(18a+5y+10x)+2(9a+5x+4y)xy\ge 27xy(x+y)$$

Loại *a* thì ta chỉ cần chứng minh

$$y^2(8y+13x)+x^2(5y+10x)+2(5x+4y)xy\ge 27xy(x+y)\Leftrightarrow 5x^3+4y^3\ge 6x^2y+3xy^2$$

Ta có $2\left(x^3+x^3+y^3\right)\underset{AM-GM}{\ge}6x^2y; x^3+y^3+y^3\underset{AM-GM}{\ge}6xy^2$

Do đó ta có điều phải chứng minh

Bây giờ như đã nói ở phần Xây dựng định lí, ta sẽ làm chặt bất đẳng thức nhờ các biến còn thừa:

$$\frac{1}{2}.18a\left(x^2+y^2+xy\right)\underset{AM-GM}{\geq}9a.\frac{3}{4}.(x+y)^2=\frac{27}{2}a(c-a)^2$$

Như vậy là ta có bất đẳng thức chặt hơn là: với $k=\min\{a,b,c\}$ và $t=\max\{a,b,c\}$ thì

$$4(a+b+c)^3\geq 27\left(ab^2+bc^2+ca^2+abc\right)+\frac{27}{4}k(t-k)^2,$$

Các bạn đừng lo cách làm chặt này chỉ đúng trong một trường hợp mà ta đang xét, bởi trong trường hợp ngược lại $a\geq b\geq c$ thì sau khi đánh giá bất đẳng thức $(a-b)(b-c)(c-a)\leq 0\leq -(a-b)(b-c)(c-a)$, công việc còn lại chỉ là vấn đề tương tự.

Bài toán 6. *Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh bất đẳng thức*

$$a^3+b^3+c^3+2(a^2b+b^2c+c^2a)\geq 3(ab^2+bc^2+ca^2)$$

Lời giải.

Nếu $a\geq b\geq c$ thì $2(a^2b+b^2c+c^2a)\geq 2(ab^2+bc^2+ca^2)$ và $a^3+b^3+c^3\geq ab^2+bc^2+ca^2$ nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Nếu $c\geq b\geq a$ thì bất đẳng thức được viết lại như sau

$$(a+b)(a-b)^2+(b+c)(a-b)^2+(c+a)(a-b)^2\geq 5(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\Leftrightarrow (2a+b+c)(b-a)^2+(2c+a+b)(c-b)^2\geq (b-a)(c-b)(3c-7a)$$

Đặt $c=a+x+y, b=a+x$. Bất đẳng thức được viết lại như sau

$$x^2(4a+2x+y)+y^2(4a+3x+2y)\geq xy(-4a+3x+3y)$$

Loại *a* đi thì ta chỉ cần chứng minh

$$x^2(2x+y)+y^2(3x+2y)\geq xy(3x+3y)\Leftrightarrow 2x^3+2y^3\geq 2x^2y$$

Bất đẳng thức trên đúng do $2x^3+y^3\underset{AM-GM}{\geq}2x^2y$

Cũng như bài toán trên, ta có thể làm chặt bài toán và thu được:

$$a^3+b^3+c^3+2(a^2b+b^2c+c^2a)\geq 3(ab^2+bc^2+ca^2)+\frac{3}{2}k(t-k)^2$$

Bài toán 6. (VIF) *cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh*

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{3}{2}.\frac{2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)-abc}{2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)-abc}\geq\frac{5}{2}$$

Lời giải.

Nếu $a\geq b\geq c$ thì $\frac{2(a^2b+b^2c+c^2a)-abc}{2(ab^2+bc^2+ca^2)-abc}\geq 1$, nên dễ dàng suy ra điều phải chứng minh

Nếu $c\geq b\geq a$ thì bất đẳng thức được viết lại như sau

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{ab+bc+ca}\geq\frac{6(a-b)(b-c)(c-a)}{2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)-abc}$$

Mà $\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{ab+bc+ca}=\frac{2\left[(c-b)^2+(b-a)^2+(c-b)(b-a)\right]}{ab+bc+ca}\geq\frac{6(c-b)(b-a)}{ab+bc+ca}$

Nên ta chỉ cần chứng minh $\frac{1}{ab+bc+ca}\geq\frac{c-a}{2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)-abc}$

Quy đồng và rút gọn bất đẳng thức trên thành $c(b-a)(c-a)+2ca^2+3a^2b\geq 0$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a=b=c.

Bài toán 7. Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc + \frac{3}{4}|(a-b)(b-c)(c-a)|$$

Lời giải. thật ra ta có thể chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc + |(a-b)(b-c)(c-a)|$$

Không mất tính tổng quát giả sử $c \geq b \geq a$. Bất đẳng thức trên được viết lại như sau

$$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc + 3|(a-b)(b-c)(c-a)|$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geq 6|(a-b)(b-c)(c-a)|$$

Áp dụng tiêu chuẩn 4, ta cần phải chứng minh $6(a+b+c)-6(c-a) \geq 0 \Leftrightarrow 12a+6b \geq 0$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên.

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a=b=c

Thật ra hằng số tốt nhất trong bài toán trên là $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}+9}{\sqrt{3}-1}}$, tức là ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}+9}{\sqrt{3}-1}}|(a-b)(b-c)(c-a)|$$

Nhưng để giải quyết bài toán này thì cần phải nhờ đến công cụ hàm số, nên không tiện nhắc đến ở đây.

VI/ Bài tập áp dụng.

Qua các ví dụ trên đã phần nào nói lên điểm mạnh của kĩ thuật này, và bây giờ các bạn thử áp dụng phương pháp này để giải quyết các bài toán:

Bài toán 1. *Cho các số thực không âm a,b,c sao cho* $a^2+b^2+c^2=3$. *Chứng minh*

$$ab^2+bc^2+ca^2\le 2+abc$$

Bài toán 2. *Cho các số thực không âm a,b,c sao cho* $a^2+b^2+c^2=1$. *Chứng minh*

$$(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)\le\frac{1}{4}$$

Bài toán 3. *Cho các số thực không âm a,b,c. chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3abc}{2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)}\ge 2$$